

Gazi Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Kimya Mühendisliği Bölümü
KM 377 Sayısal Analiz Yöntemleri
Yrd.Doç.Dr. Muzaffer BALBAŞI
Arş.Gör. Alpay ŞAHİN

PROBLEM SET I

1 Aşağıdaki integrali;

$$\int_0^4 (1 - e^{-2x}) dx$$

- analitik olarak
- tekli uygulamalı trapez kuralına göre
- çoklu uygulamalı trapez kuralına göre (n=2 ve 4)
- tekli uygulamalı Simpson 1/3 kuralına göre
- çoklu uygulamalı Simpson 1/3 kuralına göre (n=4) çözünüz.
- a şikkındaki analitik çözüme göre %hatalar nelerdir?

2 Aşağıdaki integrali;

$$\int_0^{\pi/2} (6 + 3\cos x) dx$$

- analitik olarak
- tekli uygulamalı trapez kuralına göre
- çoklu uygulamalı trapez kuralına göre (n=2 ve 4)
- tekli uygulamalı Simpson 1/3 kuralına göre
- çoklu uygulamalı Simpson 1/3 kuralına göre (n=4) çözünüz.
- a şikkındaki analitik çözüme göre %hatalar nelerdir?

3. Aşağıdaki integralin değerini analitik olarak ve trapez kuralına göre (n= 1,2,3 ve 4) belirleyiniz.

$$\int_1^2 (x + 2/x)^2 dx$$

Analitik çözüme göre bağıl hatalar nelerdir?

4. Aşağıdaki integrali;

$$\int_{-2}^4 (1 - x - 4x^3 + 2x^5) dx$$

- analitik olarak
- tekli uygulamalı trapez kuralına göre
- çoklu uygulamalı trapez kuralına göre (n=2 ve 4)
- Simpson 1/3 kuralına göre çözünüz.
- a şikkındaki analitik çözüme göre %hatalar nelerdir?

5. Tablo halinde verilmiş fonksiyonun integralini

- Trapez kuralı ile
- Simpson kuralı ile belirleyiniz

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	1	8	4	3.5	5	1

6. Tablo halinde verilmiş fonksiyonun integralini

- Trapez kuralı ile
- Simpson kuralı ile belirleyiniz

x	-2	0	2	4	6	8	10
f(x)	35	5	-10	2	5	3	20

7. $f(x) = 2e^{-1.5x}$ fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki tablodaki değerler oluşturulmuştur.

x	0	0.05	0.15	0.25	0.35	0.475	0.6
f(x)	2	1.8555	1.5970	1.3746	1.1831	0.9808	0.8131

a=0, b=0.6 aralığındaki integralin değerini

- analitik olarak
- Trapez kuralına göre
- Trapez ve Simpson kurallarının kombinasyonu ile çözünüz. b ve c şıklarından elde ettiğiniz sonuçlara göre % bağıl hataları hesaplayınız.

8. Sabit sıcaklıkta üretilen iş aşağıdaki bağıntı ile verilmektedir.

$$W = \int PdV$$

Burada W iş, P basınç ve V hacim değeridir. Trapez ve Simpson 1/3 kuralının kombinasyonunu ve aşağıdaki tablodaki basınç ve hacim değerlerini kullanarak toplam işi (kJ=kN.m) bulunuz.

Basınç (kPa)	336	294.4	266.4	260.8	260.5	249.6	193.6	165.6
Hacim (m ³)	0.5	2	3	4	6	8	10	11

9. Aşağıdaki verileri kullanarak uzaklığın ne olduğunu hesaplayınız.

t (dakika)	1	2	3.25	4.5	6	7	8	9	9.5	10
v, m/s	5	6	5.5	7	8.5	8	6	7	7	5

- Trapez kuralına göre
- Trapez ve Simpson kuralının kombinasyonuna göre

10. Bir milin yoğunluğuna bağlı olarak kütle miktarı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$m = \int_0^L \rho(x)A_c(x)dx$$

Burada m=kütle, $\rho(x)$ =yoğunluk, $A_c(x)$ =kesit alanı, x = mil boyunca olan uzaklık ve L = milin toplam uzunluğudur. Aşağıdaki değerler 10 m uzunluğundaki bir mil boyunca ölçülmüştür. En az hata derecesinde olacak şekilde milin ağırlığını bulunuz.

X, m	0	2	3	4	6	8	10
ρ , g/cm ³	4.00	3.95	3.89	3.80	3.60	3.41	3.30
A_c , cm ²	100	103	106	110	120	133	150

11. %0.5 'den daha az hata olacak şekilde aşağıdaki integralin değerini Romberg metodu ile belirleyiniz. Analitik çözümü kullanarak bağıl hata ve gerçek hata değerleri nelerdir?

$$I = \int_1^2 \left(2x + \frac{3}{x} \right)^2 dx$$

12 h⁸ mertebesinde Romberg metodunu kullanarak aşağıdaki integralin değerini bulunuz ve hata değerlerini kıyaslayınız.

$$I = \int_0^3 xe^x dx$$

13 %0.5 'den daha az hata olacak şekilde aşağıdaki integralin değerini Romberg metodu ile belirleyiniz.

$$\int_0^2 \frac{e^x \sin x}{1+x^2} dx$$

14 Bir borudan taşınan toplam kütle miktarı zamana bağlı olarak aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

$$M = \int_{t_1}^{t_1} Q(t)c(t)dt$$

Burada M =kütle (mg), t_1 =başlangıç zamanı (dakika), t_2 = son zaman (dakika), $Q(t)$ = hacimsel akış hızı ($m^3/dakika$) ve $c(t)$ = konsantrasyon (mg/m^3). Hacimsel akış hızının ve konsantrasyonun zamana bağlı değişimi aşağıdaki şekildedir.

$$Q(t) = 9 + 4 \cos^2(0.4t)$$

$$c(t) = 5e^{-0.5t} + 2e^{0.15t}$$

$t_1=2$ ve $t_2=8$ zaman aralığında hata değeri minimum %0.1 olacak şekilde transfer edilen kütle miktarını Romberg metoduyla belirleyiniz.

15. $f(x) = -0.5x^2 + 2.5x + 4.5$ fonksiyonunun yüksek kökünü 3 iterasyon yaparak Bisection metoduyla belirleyiniz. Başlangıç tahminleri $x_l=5$ ve $x_u=10$ alıp her bir iterasyon sonunda tahmini hata ve gerçek hata değerlerini belirleyiniz. (gerçek kökler -1.40512 ve 6.40512 'dir)

16. $f(x) = 5x^3 - 5x^2 + 6x - 2$ fonksiyonunun kökünü hata değeri %10'un altında olacak şekilde Bisection metoduyla belirleyiniz. Başlangıç tahminleri $x_l=0$ ve $x_u=1$ alınabilir.

17 $f(x) = 2x^3 - 11.7x^2 + 17.7x - 5$ fonksiyonun en yüksek gerçek kökünü

a) Newton-Raphson Metoduyla (3 iterasyon, $x_0=3$)

b) Secant Metoduyla (3 iterasyon, $x_{-1}=3$, $x_0=4$) belirleyiniz. Yaklaşık bağıl hata değerlerini bulunuz. Kök ≈ 3.58

18 $f(x) = -x^2 + 1.8x + 2.5$ fonksiyonun kökünü, $x_0=5$ olarak hata değeri %0.05'in altında olacak şekilde Newton-Raphson Metoduyla belirleyiniz.

19. Bir havuzdaki kirlilik için kütle denkliği aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$V \frac{dc}{dt} = W - Qc - kV\sqrt{c}$$

$V = 1 \times 10^6 m^3$, $Q = 1 \times 10^5 m^3/yr$, $W = 1 \times 10^6 g/yr$ ve $k = 0.25 m^{0.5}/g^{0.5}/yr$ olarak verilmiştir. Modifiye edilmiş Secant yöntemini kullanarak kararlı haldeki konsantrasyon için çözümü yapınız. Başlangıç tahmini $c = 4 g/m^3$ ve $\delta = 0.5$ olarak alınabilir. 3 iterasyon yaparak 3. iterasyon sonunda bağıl hata değerini belirleyiniz.

$$\begin{aligned} 20. \quad & 2x_1 - 6x_2 - x_3 = -38 \\ & -3x_1 - x_2 + 7x_3 = -34 \\ & -8x_1 + x_2 - 2x_3 = -20 \end{aligned}$$

a) Yukarıdaki denklemleri kısmi pivotlama yaparak Gauss eliminasyon yöntemiyle çözünüz.

b) Orijinal denklemlerde bulduğunuz değerleri yerine koyarak cevaplarınızı kontrol ediniz.

$$\begin{aligned} 21. \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ & 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -4 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{aligned}$$

Gauss Jordan yöntemiyle yukarıdaki denklemleri herhangi bir pivotlama işlemi yapmadan çözünüz. Bulunan değerleri orijinal denklemde yerlerine koyarak cevaplarınızı kontrol ediniz.

$$\begin{aligned} 22. \quad & -3x_2 + 7x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ & 5x_1 - 2x_2 = 2 \end{aligned}$$

a) Yukarıdaki denklemleri kısmi pivotlama yaparak Gauss eliminasyon yöntemiyle çözünüz.

b) Orijinal denklemlerde bulduğunuz değerleri yerine koyarak cevaplarınızı kontrol ediniz.

23. $x_1 + x_2 - x_3 = -3$
 $6x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2$
 $-3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1$

Yukarıdaki denklemleri

- Gauss eliminasyon yöntemiyle
- Kısmi pivotlama yaparak Gauss eliminasyon yöntemiyle
- Kısmi pivotlama yaparak Gauss Jordan yöntemiyle çözünüz.

24. $10x_1 + 2x_2 - x_3 = 27$
 $-3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -61.5$
 $x_1 + x_2 + 5x_3 = -21.5$

Denklemleri;

- Gauss eliminasyon yöntemiyle çözümden sonra [L] ve [U] matrisleriyle [A]'yı belirleyiniz.
- LU bozunması ile çözüme ulaşınız.
- Ayrıca sistemi alternatif sağ el vektörü yardımıyla çözünüz. $\{B\}^T = [12 \ 18 \ -6]$

25. a) Aşağıdaki sistem denklemlerini pivotlama yapmadan LU bozunması ile çözünüz.

$8x_1 + 4x_2 - x_3 = 11$
 $-2x_1 + 5x_2 + x_3 = 4$
 $2x_1 - x_2 + 6x_3 = 7$
b) Matrisin tersini alıp sağlamasını yapınız $[A][A]^{-1}=[I]$

26. Seri bağlı birkaç reaktörde kütlenin belirlenmesi için konsantrasyona bağlı aşağıdaki denklemler elde edilmiştir.

$15c_1 - 3c_2 - c_3 = 3800$
 $-3c_1 + 18c_2 - 6c_3 = 1200$
 $-4c_1 - c_2 + 12c_3 = 2350$

- Matrisin tersini bulunuz
- Çözüm için matrisin tersini kullanınız

27. Gauss Siedel metodunu kullanarak aşağıdaki sistemi hata oranı %5'in altında olacak şekilde çözünüz.

$10x_1 + 2x_2 - x_3 = 27$
 $-3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -61.5$
 $x_1 + x_2 + 5x_3 = -21.5$

28. $-3x_1 + x_2 + 12x_3 = 50$
 $6x_1 - x_2 - x_3 = 3$
 $6x_1 + 9x_2 + x_3 = 40$

Gauss Siedel Metodunu kullanarak

- relaksasyon olmadan
- relaksasyon varken $\lambda = 0.95$

%5 hata değeri gözünüzde bulundurarak çözünüz.

29. Aşağıdaki verilere göre

x	1.6	2	2.5	3.2	4	4.5
f(x)	2	8	14	15	8	2

f(2.8) değerini Newton interpolasyon polinomuna göre 1. dereceden 3. dereceye kadar çözünüz.

30. Aşağıdaki verilere göre

x	1	2	3	5	7	8
f(x)	3	6	19	99	291	444

f(4) değerini Newton interpolasyon polinomuna göre 1. dereceden 4. dereceye kadar çözünüz.

31. Yukardaki problemi Lagrange polinomuna göre 1. dereceden 3. dereceye kadar çözünüz.